Idéaux - TD 4

1. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un idéal de R.

2. Montrer de 2 façons que $n\mathbb{Z} = \{nm \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer de 2 façons que $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{R}[x]$.

4. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de S. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de R.

5. Soit $f : R \to S$ un épimorphisme d'anneaux et soit I un idéal de R. Montrer que $f(I)$ est un idéal de S.

6. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Si m divise n, alors $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$.

7. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ si et seulement si $n = \pm m$.

8. Soient $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$. Montrer que $(f(x)) = (g(x))$ si et seulement si $f(x) = \lambda g(x)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

9. Soit A un sous-ensemble d'un anneau R. Montrer que (A) est l'intersection de tous les idéaux de R qui contiennent A. En déduire que (A) est le plus petit idéal de R qui contient A.

10. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, et $I = (m, n)$ l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par m et n. Montrer que $(m, n) = (\mathrm{pgcd}(m, n))$ (utiliser le fait que $\mathrm{pgcd}(m, n) = am + bn$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$).

11. Pour les idéaux principaux $I = (m)$ et $J = (n)$ de $\mathbb{Z}$ (avec $mn \neq 0$), calculer les idéaux $I \cap J$, $I + J$ et IJ.

12. Montrer que l'idéal $(2, x)$ de $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas principal.

13. Soit $R = \mathbb{C}[x]$ et $I = (x)$. Montrer que $f(x) + I = g(x) + I$ pour $f(x), g(x) \in R$ si et seulement si $f(0) = g(0)$.